

إذا كان لدينا فضاء طوبولوجي (X, τ) متقطع

عین المجموعات الكثيفة في هذا الفضاء؟؟

يحتوي هذا الفضاء مجموعات كثيفة وحيدة هي X فقط

$$\bar{X} = X$$

نفرض لدينا $A \neq \emptyset$ و $A \neq X$ عندئذ تكون مجموعتين منفصلتين

و $\bar{A} = A$ و $\bar{A} = A$ حيث ليست كثيفة لأن لصاقتها لا تساوي X .

مثال - فضاء (X, τ) غير متقطع، τ طوبولوجيا ضعيفة

نفرض $A \neq \emptyset$ و $A \neq X$ و $\bar{A} = X$ حيث كثيفة وبالتالي

في هذا الفضاء جميع المجموعات كثيفة ما عدا \emptyset لأن $\tau = \{X, \emptyset\}$

الصاغة أصغر مجموعتين تؤدي تفسيراً -

فضاء المتجهات المنتهية :

لتكن X مجموعة غير منتهية، إذا كان A مجموعة فرعية من X

فنقص بالرمز $|A| < \infty$ المتجهة المنتهية أي متجهة A

مجموعات $\neq \emptyset$ منتهية نعرف طوبولوجيا على X التالى τ أسرة المجموعات

الفرعية من X التي متجهاتها منتهية

عندئذ ليست منتهية $\tau = \{ \emptyset \cup \{ \emptyset \} : |X \setminus U| < \infty \}$

تدعى طوبولوجيا المتجهات المنتهية والفضاء الناتج فضاء المتجهات المنتهية

لنتأكد من τ طوبولوجيا؟؟

① شرط الإغلاق لنفرض $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ أسرة من عناصر τ

لنثبت أن الإغلاق من τ $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ لأن $X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus U_\alpha)$$

متناهية حسب ديمورغان

مجموعات منتهية و.م.م

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \subset \tau$$

(١) بالنسبة لالتقاطع $\cap_{i=1}^n U_i$ لنثبت أن $U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{I}$ لنأخذ المتكافئة

$$X \mid \bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcap_{i=1}^n (X \mid U_i)$$
 حيث $X \mid U_i$ منتهية

(٢) $\emptyset, X \in \mathcal{I}$ ومنه $X \mid \emptyset = X$ ، $X \mid X = \emptyset$ منتهية
 ومنه \mathcal{I} طوبولوجيا

المجموعات المفتوحة في هذا الفضاء هي أي مجموعات منتهية منتهية بالإضافة
 إلى \emptyset .

بالإضافة إلى أن المجموعات المغلقة هي المجموعات المنتهية بالإضافة لـ X .

مثال -

لنقرض $X = \mathbb{N}$ مجموعات الأعداد الطبيعية

(١) مجموعة مفتوحة : $U_1 = \{3, 4, 5, 6, \dots\}$

لأنه منتهية منتهية $X \mid U_1 = \{1, 2\}$

وأيضا : $U_2 = \{1, 2, 3, 17, 18, 19, 20, \dots\}$

منتهية منتهية $X \mid U_2 = \{4, 5, \dots, 16\}$

(٢) مجموعة غير مفتوحة وغير مغلقة :

الأعداد الفردية $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ غير منتهية و

أدلة الزوجية أو مضاعفات عدد

منتهية

* في هذا الفضاء وتتحقق الخاصية التالية :

أي مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين تتقاطعا - مثال -

لنقرض $U, V \in \mathcal{I}$ مجموعتين مفتوحتين وغير خاليتين لبرهان

لنقرض أن $U \cap V = \emptyset$ هذا يعني متضادة أي عندها كوني الأقرى على سبيل

امثال $X \mid U \geq 1$ وهذا غير ممكن لأن $U \in \mathcal{I}$

$X \mid U$ منتهية في حين أن $V \in \mathcal{I}$ هي غير منتهية وهذا

الذي يناقض. ومنه $U \cap V \neq \emptyset$

وبالتالي أي جواريت لأي نقطتين يتقاطعا في هذا الفضاء $X=N$

مثال -

لنكن A مجموعة جزئية من فضاء المتجهات المنتهية X أوجد :

$$A^\circ \text{ و } \bar{A} \text{ و } A' \text{ و } Fr(A) \text{ و } Ext(A)$$

ميز حالتي: (1) مجموعة منتهية

$$A^\circ = \phi$$

لأنه لا توجد مجموعة مفتوحة (غير منتهية)

$$\bar{A} = A$$

منتهية \Leftarrow مغلقة

$$Fr(A) = \bar{A} \setminus A = A$$

$$Ext = X \setminus A^\circ = X \setminus A$$

$$A' = \phi$$

لأنه $A = \{1, 2, 3\}$

لذا نحن نأخذ $U = \{1, 4, 5, 6, \dots\}$ مجموعة منتهية مغلقة تحتوي الواحد من الجوار

$$U \cap A \setminus \{1\} = \phi$$

على أي عنصر هذا

حالة (2) A مجموعة غير منتهية

$$A^\circ =$$

هناك احتمالان بالنسبة لـ A°

الأول أن مجموعة A منتهية $X \setminus A$ عندما A مجموعة حسب تعريف

$$A^\circ = A$$

وبالتالي

والثاني أن مجموعة A غير منتهية $X \setminus A$ عندما $A^\circ = \phi$

$$\bar{A} = X \rightarrow \text{في هذا الفضاء أي مجموعة غير منتهية}$$

تكون كثيفة لأن يوجد U جوار لكل x ومنه

$$U \cap A \neq \phi \text{ ومنه } x \text{ لاصقة لأنه لو كان } U \cap A = \phi \Leftarrow$$

$X \setminus U \supset A$ وهذا محيل لأنه $X \setminus U$ منتهية و A غير منتهية

$$Fr = \bar{A} \setminus A^\circ =$$

$$Ext = X \setminus \bar{A} =$$

$$A' = X$$

تعريف: $\text{Ext}(A \cup B) = \text{Ext } A \cap \text{Ext } B$ الكارثية = نقطة
 $X \setminus \overline{A \cup B} = X \setminus (\overline{A} \cup \overline{B})$

$$X \setminus \overline{A \cup B} = (X \setminus \overline{A}) \cap (X \setminus \overline{B})$$

التطبيقات المستمرة -

تعريف: ليكن f دالة $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ و $x_0 \in X$ نقطة من المثلثات نقول عن التطبيق f انه مستمر في النقطة x_0 اذا كان من اجل أي جوار V لنقطة $f(x_0)$ في Y يوجد جوار U لنقطة x_0 في X بحيث $f(U) \subseteq V$

مبرهنة -

تكون f مستمرة في x_0 اذا وفقط اذا كانت الصورة العكسية لأي جوار V لنقطة $f(x_0)$ في Y هي جوار لنقطة x_0 في X شرط اللازم وان كان f تطبيق مستمر.

البرهان:

لتفرض f مستمرة في x_0 عندها حسب التعريف من اجل أي جوار V لنقطة $f(x_0)$ يوجد جوار U لنقطة x_0 بحيث $f(U) \subseteq V$

$$U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V)$$

بافتراضاً جوار V لنقطة $f(x_0)$ في Y ومنه $f^{-1}(V)$ جوار x_0 وبالعكس لتفرض العكس فحقق عندها من اجل أي جوار V لنقطة $f(x_0)$ يوجد

جوار U لنقطة x_0 في X بحيث $f(U) \subseteq V$ حيث $U = f^{-1}(V)$ حيث

$$f(U) = f(f^{-1}(V)) \subseteq V$$

حتى يكون $f^{-1}(V)$ مستمراً في x_0 يكون تقابل امتثالي - عامر

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$$

$$y = \sin x \quad \text{مثال: اذا كان لدينا}$$

$$f^{-1}(0) = k\pi \quad ; \quad k = +1, 0, -1, \dots$$

$$y = f(x) = x^2$$

$$f^{-1}(1) = \pm 1 \quad f^{-1}(4) = \pm 2$$